ФМИ ФМШВП 2018-2019 - Задачи

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

22 февруари 2019

Задача 21/3

Дадени са $K = 3$ състояния и $N = 3$ актива с доходности

$$\begin{aligned}
d_1(\omega_1) &= 24, & d_2(\omega_1) &= 44, & d_3(\omega_1) &= 12\\
d_1(\omega_2) &= 20, & d_2(\omega_2) &= 44, & d_3(\omega_2) &= 12\\
d_1(\omega_3) &= 48, & d_2(\omega_3) &= 36, & d_3(\omega_3) &= 12.
\end{aligned}$$

Цените на тези активи са

$$p_1 = 35, p_2 = 40, p_3 = 12.$$

а) Да се намери множеството на всички достижими финални потребления, т.е. потребления, които могат да бъдат достигнати при $e(T) = \vec{0}$.

б) Достижимо ли е финалното потребление

$$c(0) = 10, c(T, \omega_1) = 6, c(T, \omega_2) = 5, c(T, \omega_3) = 12?$$

Намерете началните приходи извън пазара и портфейла, които осигуряват това потребление.

в) Достижимо ли е финалното потребление

$$c(0) = 0, c(T, \omega_1) = 9, c(T, \omega_2) = 1, c(T, \omega_3) = 17?$$

Намерете началните приходи извън пазара и портфейла, които осигуряват това потребление.

г) Допуска ли дадената система от цени арбитраж?

Решение. а) Първо да забележим, че пазарът е пълен (и, с подходящ начален капитал $e(0)$, всички финални потребления са достижими), тъй като матрицата на доходностите

$$D = \begin{pmatrix} 24 & 44 & 12 \\ 20 & 44 & 12 \\ 48 & 36 & 12 \end{pmatrix}$$

е обратима. Наистина, ще намерим обратната матрица по метода на Гаус-Жордан:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 44 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 44 & \boxed{12} & 0 & 1 & 0 \\ 48 & 36 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{4} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 20 & 44 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 24 & -8 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 44 & 12 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{-8} & 0 & -7 & 6 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -87/2 & 39 & 11/2 \\ 0 & -8 & 0 & -7 & 6 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -29/8 & 13/4 & 11/24 \\ 0 & 1 & 0 & 7/8 & -3/4 & -1/8 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/8 & -3/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -29/8 & 13/4 & 11/24 \end{array}\right).$$

В крайна сметка, имаме

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ 7/8 & -3/4 & -1/8 \\ -29/8 & 13/4 & 11/24 \end{pmatrix}.$$

Изразяваме портфейла $\theta \in R^N$ чрез цените $p \in R^N$, крайното потребление $c(T) \in \mathbb{R}^K$ и приходите извън пазара $e(T) \in \mathbb{R}^K$, представени като вектор-стълбове, и матрицата на доходностите D.

От уравнението на баланса за финалното време $c(T) - e(T) = D\theta$ намираме $\theta = D^{-1}(c(T) - e(T))$.

За да намерим начален капитал $e(0)$, който при нулеви финални приходи извън пазара $e(T) = \vec{0}$ ни осигурява потреблението $c(T)$, заместваме намереното θ в уравнението на баланса за началното време, т.е.

$$c(0)-e(0)=-p^T\theta \iff e(0)=c(0)+p^T\theta=c(0)+p^TD^{-1}(c(T)-e(T))=$$
$$=c(0)+(D^{-T}p)^T(c(T)-e(T))=c(0)+\left\langle D^{-T}p, c(T)-e(T)\right\rangle.$$

Пресмятаме $D^{-T}p$:

$$D^{-T}p=\begin{pmatrix}1/4 & 7/8 & -29/8\\ -1/4 & -3/4 & 13/4\\ 0 & -1/8 & 11/24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}35\\40\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{35}{4}+40\cdot\dfrac{7}{8}-12\cdot\dfrac{29}{8}\\ -\dfrac{35}{4}-40\cdot\dfrac{3}{4}+12\cdot\dfrac{13}{4}\\ -40\cdot\dfrac{1}{8}+12\cdot\dfrac{11}{24}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(35+140-174)/4\\(-35-120+156)/4\\-5+11/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Тогава

$$e(0)=c(0)+\frac{1}{4}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, c(T)-e(T)\right\rangle.$$

б) Директно пресмятаме $e(0)$ от $c(0)=10$, $c(T)=(6,5,12)^T$ и $e(T)=\vec{0}$:

$$e(0)=10+\frac{1}{4}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\5\\12\end{pmatrix}\right\rangle=10+\frac{35}{4}=18+\frac{3}{4}.$$

в) Директно пресмятаме $e(0)$ от $c(0)=0$, $c(T)=(9,1,17)^T$ и $e(T)=\vec{0}$:

$$e(0)=0+\frac{1}{4}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\1\\17\end{pmatrix}\right\rangle=11.$$

г) Актив 3 е безрисков и има нулев лихвен процент и матрицата D е обратима, следователно можем в явен вид да намерим безрисковата вероятност ($Q=(1+r)D^{-T}p=D^{-T}p$ (този вектор вече е известен).

От основната теорема на финансовата математика следва, че щом съществува безрискова вероятност, тогава пазарът не допуска арбитраж.

Задача 180/9

Покажете, че нормалната преходна плътност

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

удовлетворява частното диференциално уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Решение. Въвеждаме помощните функции

$$\begin{aligned}
f(t,x,y) &\coloneqq \exp\left(-\frac{(x-y)^2 t^{-1}}{2}\right) = \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right)^{t^{-1}} = \exp\left(-\frac{t^{-1}}{2}\right)^{(x-y)^2} \\
g(t,x,y) &\coloneqq t^{-\frac{1}{2}} f(t,x,y)
\end{aligned}$$

Тогава $p(t,x,y) = \frac{g(t,x,y)}{\sqrt{2\pi}}$ и очевидно оригиналното диференциално уравнение е еквивалентно на

$$\sqrt{2\pi}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \sqrt{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Диференцираме f и g по t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= (-t^{-2})\left(\frac{(x-y)^2}{2}\right) f(t,x,y) \\
\frac{\partial g}{\partial t} &= \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{3}{2}} f(t,x,y) + t^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} f(t,x,y)\left(1 - (x-y)^2 t^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Диференцираме f и g по x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \left(-\frac{t^{-1}}{2}\right) 2(x-y) f(t,x,y) = -t^{-1}(x-y) f(t,x,y) \\
\frac{\partial g}{\partial x} &= t^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial f}{\partial x} = -t^{-\frac{3}{2}}(x-y) f(t,x,y) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -t^{-\frac{3}{2}}\left(f(t,x,y) + (x-y)\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -t^{-\frac{3}{2}} f(t,x,y)\left(1 - (x-y)^2 t^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Като сравним получените резултати виждаме, че

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$

което е еквивалентно на твърдението на теоремата.

Задача 180/10

Нека $x_t = \int_0^t W_s ds$. Докажете, че $\mathbb{E}_P(x_t) = 0$ и $\mathbb{E}_P(x_t^2) = \frac{t^3}{3}$

Решение. За всяко $\omega \in \Omega$, $x_t(\omega) = \int_0^t W_s(\omega) ds$ е риманов интеграл. Тъй като траекториите $s \mapsto W_s(\omega)$ на винеровия процес са непрекъснати с вероятност 1 реални функции и $W_s \in \mathrm{No}(0,s)$, то $W_s(\omega)$ е интегруема спрямо продуктовата мярка на крайните мерки λ и P над $[0,T] \times \Omega$ (тук λ е лебеговата мярка). Следователно за $W_s(\omega)$ важи теоремата на Фубини, т.е.

$$\mathbb{E}_P(x_t) = \mathbb{E}_P \int_0^t W_s ds = \int_0^t \mathbb{E}_P(W_s) ds = 0.$$

За дисперсията на x_t имаме

$$\mathbb{D}_P(x_t) = \mathbb{E}_P(x_t^2) = \mathbb{E}_P \left(\left(\int_0^t W_s ds \right)^2 \right) = \mathbb{E}_P \left(\int_0^t W_s ds \int_0^t W_r dr \right) =$$
$$= \mathbb{E}_P \left(\int_0^t \int_0^t W_s W_r \, ds \, dr \right) = \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}_P(W_s W_r) \, ds \, dr.$$

Търсим $\mathbb{E}_P(W_s W_r) = \mathrm{cov}_P(W_s W_r)$. Нека първо $W_s \geq W_r$. Имаме

$$\mathbb{E}_P(W_s W_r) = \mathbb{E}\left((W_s - W_r + W_r)W_r\right) = \mathbb{E}\left((W_s - W_r)W_r + W_r^2\right) =$$
$$= \mathbb{E}\left((W_s - W_r)W_r\right) + \mathbb{D}\, W_r.$$

Тъй като $W_s - W_r$ и $W_r = W_r - W_0$ са независими и центрирани, то ковариацията им е 0. Следователно $\mathbb{E}_P(W_s W_r) = \mathbb{D}\, W_r = r$.

Като вземем предвид и случая $W_s \leq W_r$, получаваме

$$\mathbb{E}_P(W_s W_r) = \min(s, r),$$

откъдето

$$\mathbb{E}_P(x_t^2) = \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}_P(W_s W_r) \, ds \, dr = \int_0^t \int_0^t \min(s,r) \, ds \, dr =$$
$$= \int_0^t \int_0^r s \, ds \, dr + \int_0^t r \int_r^t \, ds \, dr = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 dr + \int_0^t r(t-r) dr =$$
$$= \int_0^t \left(\frac{r^2}{2} + tr - r^2 \right) dr = t \int_0^t r dr - \frac{1}{2} \int_0^t r^2 dr = \frac{1}{2} t^3 - \frac{1}{6} t^3 = \frac{1}{3} t^3.$$

Задача 291/1

Нека N_t е поасонов процес с параметър λ. Пресметнете интеграла

$$\int_0^t N_{s-} d(N_s - \lambda s)$$

Решение. Първо ще разделим пресмятането на интеграла на две части. При фиксирано $\omega \in \Omega$ използваме адитивността на стилтесовия интеграл за траекториите $s \mapsto N_s(\omega)$:

$$\int_0^t N_{s-}(\omega) d(N_s(\omega) - \lambda s) = \int_0^t N_{s-}(\omega) dN_s - \lambda \int_0^t N_{s-}(\omega) ds,$$

благодарение на което имаме следното равенство с вероятност 1

$$\int_0^t N_{s-} d(N_s - \lambda s) = \int_0^t N_{s-} dN_s - \lambda \int_0^t N_{s-} ds.$$

Сега пресмятаме поотделно интегралите, използвайки това, че траекториите на поасоновия процес са стъпаловидни функции със скокове 1:

$$\int_0^t N_{s-} dN_s = \sum_{s \le t} N_{s-}(N_s - N_{s-}) = \sum_{k=1}^{N_t} (k-1)(k-(k-1)) = \sum_{k=1}^{N_t} (k-1) = \frac{1}{2}(N_t - 1)N_t.$$

Нека s_k е моментът на k-тия скок и нека $\tau_k = s_k - s_{k-1} \in \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$\int_0^t N_{s-} ds = \sum_{k=1}^{N_t} \int_{s_{k-1}}^{s_k} (k-1) ds = \sum_{k=1}^{N_t} (k-1)(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N_t} k\tau_k - s_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} k\tau_k - t.$$

В крайна сметка,

$$\int_0^t N_{s-} d(N_s - \lambda s) = \frac{1}{2}(N_t - 1)N_t - \lambda \sum_{k=1}^{N_t} k\tau_k - \lambda t.$$

Задача 291/5

Докажете, че

$$\int_0^t 2^{N_{s-}} dN_s = 2^{N_t} - 1.$$

Решение. Ще използваме факта, че стохастичната експонента удовлетворява уравнението на Долеан

$$d\,\mathcal{E}_t(N) = \mathcal{E}_{t-}(N)\, dN_t$$

с начално условие $\mathcal{E}_0(N) = 1$.

Тъй като траекториите на поасоновия процес са стъпаловидни функции със стъпка 1, стохастичната експонента $\mathcal{E}_t(N)$ на N_t е

$$\mathcal{E}_t(N) = \prod_{s \le t} (1 + N_s - N_{s-}) = \prod_{k=1}^{N_t} (1 + k - (k-1)) = 2^{N_t}.$$

Следователно

$$\int_0^t 2^{N_{s-}} dN_s = \int_0^t \mathcal{E}_{s-}(N) dN_s = \int_0^t d\,\mathcal{E}_s(N) = \mathcal{E}_t(N) - \mathcal{E}_0(N) = 2^{N_t} - 1.$$